

حيز بول $D(n)$

1) $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n$ حيث $p_i \neq p_j \Leftrightarrow D(n)$ هي شبكات توزيعات مستقلة

2) $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_n$ حيث $\alpha_1, \alpha_2, \dots \Leftrightarrow D(n)$ شبكات توزيعات غير مستقلة

أ) $D(n)$ هي شبكات بول $\Leftrightarrow n/x$ ، x أوليات مستقلة
في $D(n)$ $x \in D(n)$ أوليات متباينة
إذا كان x ، n/x

$$n = k \cdot p^2$$

أي أن n يقبل القسمة على مربع العدد الأول p وبالعكس إذا كان يوجد عدد أولي p يقسم العدد n فإن p ، n/p غير أوليين مستقلين
أ) $D(n)$ هي شبكات بول إذا وفقط إذا كان n لا يقبل القسمة على مربع عدد أولي

أي أن n هو من الشكل: $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_r$ حيث $p_i \neq p_j$ عدد أولي

فإذا عوضنا هذا الشكل على العدد n وعدنا كل $D(n)$ العنصرين المتباينين (1, 0) ، (0, 1) بالانتماء للعنصرين الآخرين

$$x+y = \gcd[lcm(x, y), lcm(\frac{n}{x}, \frac{n}{y})]$$

$$= (x \vee y) \wedge (n/x \wedge n/y) = (x \vee y) \wedge (n/(x \vee y))$$

$$x \cdot y = \gcd(x, y)$$

$$x' = n/x$$

فإن (0, 1) ، (1, 0) شكل جيد بولياً



201 / /

التاريخ

الموضوع

مثال 1: أجزء العمليات على $(D, +)$ حيث $D = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$

$$D \setminus D = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$$

+	1	2	3	5	6	10	15	30
1								
2								
3				15				
5								
6								
10								
15								
30								

•	1	2	3	5	6	10	15	30
1								
2								
3								
5								
6								
10								
15								
30								

2 21

1

2

3

5

6

10

15

30

مثال 2:

لنكتب لدينا المجموعة من العلاقات من العدد 1 إلى 3

0	1	0	1
0	0	0	0
1	1	1	1



عند ما فإن $B \in \{0, 1\}$ تتكامل عبر آبولياناً :

$$|B| = 0, 1$$

$$a \cdot b = \min(a, b)$$

تلافاً

$$a + b = \max(a, b)$$

وبالنظر إلى البول تلافاً شروطاً غير بول

1- التبادلية

2- التجميع

3- المحايد

4- وجود عنصر معكوس

للتحقق من التوزيع :

$$a + b \cdot c = (a + b)(a + c)$$

حسب المبدأ الأساسي في الدفان عدد الحالات التي يجب التحقق منها هو 2^3

$$a + b \cdot c +$$

$$0 + 0 \cdot 0 = 0$$

$$0 + 0 \cdot 1 = 0$$

$$(a + b)(a + c)$$

$$(0 + 0) \cdot (0 + 0) = 0$$

$$(0 + 0) \cdot (0 + 1) = 0$$

$$1 + 1 \cdot 1 = 1 + 1 = 1$$

$$(1 + 1)(1 + 1) = 1 \cdot 1 = 1$$

و بنسبة إلى بقية تعاطي يمكن التحقق من القانون الثاني :

$$a \cdot (b + c) = ab + ac$$

* ص ١ الشويع

رأينا في تعريف هيربول أن لك فاهية تتكون من هذين
ولا هذين أن لك حيز يمكن الكهرل على من الكهر
الأخذ بالمباركة بين العليين (+) و (-) وبين العليين
1, 0 صفلاً في العبارة

$$x + 0 = x \quad \text{شوية العبارة} \quad x \cdot 1 = x$$

وهذا فاهية في الحيز البولاني أن لك فاهية أو صفة
مستوية من المباركة الخمسة السابقة للحيز البولاني
(0, 1, 0, 1, 0, 1) تتحقق صفة عند تبديل إحدى العليين
(0, 1, 0, 1, 0, 1) بالأخرى والعليان 0, 1 هما بالأخذ
ويواسط الشوية يكف بالبرهان على فاهية ما
ويستخرج صفة صفة شوية.

دع نعلم خواص هيربول

ص ١ هات: إذا كانت (0, 1, 0, 1, 0, 1) حيزاً بولانياً عند
أن عناصر E والعليان عليها تحقق الخواص التالية:

1- قواسم اللانفو: $x + x = x$, $x \cdot x = x$

2- $x + 1 = 1$, $x \cdot 0 = 0$

3- إذا كان د أي عنصر من E وكان a عنصر آمن E

ويحقق الخاصية: $a \cdot x = 0$, $a + x = 1$

إذا a هو صمم العنصر x

4- $x' = (x \cdot 1)'$, $0' = 1$, $1' = 0$

5- يتحقق قانونان:

$$(x + y)' = x' \cdot y'$$

$$(x \cdot y)' = x' + y'$$

6- يتحقق قواسم الاصطفاص:

$$2 + (x \cdot y) = 2 \quad \text{و} \quad 2(x + y) = 2$$



201 / /

التاريخ

الموضوع

الإثبات:

$$x + x = (x+2) \cdot 1 = (2+2)(x+x) \quad -1$$

$$= x + 2x' = x + 0 = x$$

وحسب مبدأ التوزيع في خبريون تحقق المساواة الثانية.

$$x + 1 = 2 + (x+x') = (2+2) + x' \quad -2$$

$$= x + x' = 1$$

$$x \cdot 0 = 0$$

وحسب مبدأ التوزيع فان

$$x' = x' \cdot 1 = x' \cdot (2+2) \quad -3$$

بفرض

$$= x' \cdot 2 + x' \cdot 2 = x' \cdot 2 + 0$$

$$= x' \cdot 2 + (2-x) = 2(x'+2) = 2 \cdot 1 = 2$$

$$\bullet \quad 1 + 0 = 1, \quad 1 \cdot 0 = 0 \quad -4$$

$$\Rightarrow 1' = 0, \quad 0' = 1$$

$$\bullet \quad 2 + 2' = 1, \quad x \cdot x' = 0$$

$$\Rightarrow (x')' = x$$

$$(x+y) + x' \cdot y' = (2+y) + (2') \cdot (2+y) + y' \quad -5$$

$$= (1+y) \cdot (1+2) = 1 \cdot 1 = 1$$

$$(x+y) \cdot (x' \cdot y') = (x+y) \cdot x(x' \cdot y') + y(x' \cdot y')$$

$$0x' + 0 \cdot y'$$

$$= 0 + 0 = 0$$

نتج أن

$$(x+y)' = x' \cdot y'$$

$$(x \cdot y)' = x' + y'$$

وحسب مبدأ التوزيع الثاني:

$$x \cdot (x+y) = x$$

-6

$$\text{لذا: } x \cdot (x+y) = x + xy = x \cdot 1 + xy$$

$$= x(1+y) = x \cdot 1 = x$$

(2) حسب 1=

وحسب مبدأ الثبوت نتج قانون الامتصاص الثاني.

إن هذه الخواص بالإضافة إلى ثباتها إلى الشرط الوارد في تعريف حيد بول تقيد تأتي بداهة النظرية ذات العلاقة في حيد بول وكذلك في تبسيط وافتتاح المبررات البولائية وكذلك في فهم الدارات في الحواسيب الإلكترونية كما سنرى لاحقاً.

مثال أثبت أن:

$$1) a + a'b = a + b$$

$$2) a \cdot (a' + b) = a \cdot b$$

في حيد بول

الحل:

$$1) a + a'b = (a + a') \cdot (a + b) = 1 \cdot (a + b) = a + b$$

$$2) a \cdot (a' + b) = a \cdot a' + ab = 0 + a \cdot b = a \cdot b$$

مثال آخر: أثبت أن في حيد بول:

$$3) (a+b)(a'+c)(b+c) = (a+b)(a'+c)$$

$$4) a \cdot b + a' \cdot c + bc = ab + a'c$$

الحل:

$$1) (a+b)(a'+c)(b+c) = (a+b)(a'+c)(a \cdot a' + b + c)$$

$$= (a+b)(a'+c)(a + b + c)(a' + b + c)$$

$$= (a+b)(a+b+c)(a'+c)(a'+c+b)$$

حسب قانون الامتصاص

$$= (a+b)(a'+c)$$

والعلاقة (4) نتج حسب مبدأ الثبوت باستخدام (3).

ب (1) و (2) بالمثل.



201 / /

التاريخ

الموضوع

طرق إثبات: المبرهن على صيغة عبارة بولانية P
تقوم بالمباراة بين $1, 0$ وناقطة المتغير لكل متغير
مثال: أوجد صيغة العبارة

$$P = x \cdot y + x y z' + x' y$$

الحل:

$$P = x' + y' \cdot (x' + y' + z) \cdot (x + y)$$

(1) جد بول الجذبة:
لكن B هي عبارة جزئية من B بول إذا كانت
 B تحتوي المتغيرات $0, 1$ وهي وقصود العمليات في
 E تحقق جميع شروط B بول فانها تحت B بولاً أيضاً
جزئياً في E

1- الشرط اللازم والكافي لكي تكون B بولاً بولاً أيضاً:

لكن $0, 1$ و B و $A \subseteq B$

يكون A بولاً بولاً أيضاً من B إذا وفقط إذا تحقق:

(1) A تحتوي المتغيرات $0, 1$

(2) من أجل أي متغيرين x, y فان $x + y \in A$ و $x \cdot y \in A$

$$\forall x, y \in A \text{ فإن } x + y \in A \text{ و } x \cdot y \in A$$

$$\forall x \in A \text{ فإن } x' \in A$$

(3)

عند هاتين A بولاً بولاً أيضاً.

أصليات:

(1) $0, 1$ و B بولاً بولاً أيضاً و $x \in B$ يعني أن
 $0 \leq x \leq 1$ عندئذ ان العمليات $0, 1$ و B بولاً بولاً أيضاً
بولاً بولاً أيضاً من B بولاً بولاً أيضاً و x بولاً بولاً أيضاً

(2) نافذ الجبر البولياني (P, E, \cup, \cap, \neg)

حيث E هي عبارة عند متغيرات

عندئذ المجموعات الكبريتية متناهية حيوية مع المجموعات
الكبريتية من E التي عناصرها مستهترة
لا تشكل حيداً بولياً حيدياً.

(3) هل D_6 تشكل حيداً بولياً حيدياً من D_3 ؟

لا تشكل حيداً بولياً حيدياً وذلك لأن $1 \notin D_6 \neq D_6$

$7 \notin D_3$ لأن $3 \notin D_6 \neq D_6$ $3 \in D_6$

يشعاً D_6 هو حيد بولياً حيداً في ذات

- أوجب اربط حيداً حيداً من D_3 ؟

$\{1, 3, 5, 7\}$ ، $\{2, 4, 6\}$ ، $\{1, 3, 5, 7\}$ ، $\{2, 4, 6\}$

$\{1, 3, 5, 7\}$ ، $\{2, 4, 6\}$ ، $\{1, 3, 5, 7\}$ ، $\{2, 4, 6\}$

100 الجواب الميكانيكي والإيزومورفزم البوليات:

تعريف: ليكن $(A, +, \cdot, 0, 1)$ و $(B, +, \cdot, 0, 1)$ حيدتين بولياتين
عندئذ الجواب الميكانيكي $A \times B$ ، و المحقق للشرط:

1) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

2) $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 \cdot x_2, y_1 \cdot y_2)$

3) $(x, y)^{-1} = (x^{-1}, y^{-1})$

سجلت بالجواب الميكانيكي للبرهان البوليات A و B .

ونلاحظ أن جميع شروط حيد بول متوفرة بالنسبة

للمعاملات السابقة أي أن $(A \times B, +, \cdot, 0, 1)$ حيد

$0 = (0_A, 0_B)$ ، $1 = (1_A, 1_B)$ تشكل حيد بوليات.

تعريف المورفزم البوليات:

ليكن لدينا $A \rightarrow B$ من f مورفزم بوليات
إذا تحققت الشروط التالية:



$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

$$f(xy) = f(x) \cdot f(y)$$

$$f(x') = (f(x))'$$

وإذا كان بالإمكان ذلك متباين

وعا مر فأننا سميت ابنه صور من بوليان.

نتيجة: من التعريف السابق نتج مباشرة أنه إذا كان

f صور من بوليان تستطيع أن يكتب:

$$f(0_A) = f(x \cdot x) = f(x) \cdot f(x) = f(x) (f(x))' = 0_B$$

$$f(1_A) = f(x+x') = f(x) + f(x') = f(x) + (f(x))' = 1_B$$

* مبرهنة: إذا كانت f رالت من الحير البوليان E في A عند أن الترمز التالية متكافئة:

(1) f صور من بوليان

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad f(xy) = (f(x))' \quad (2)$$

$$f(xy) = f(x) \cdot f(y), \quad f(x') = (f(x))' \quad (3)$$

$$\forall x, y \in E$$

~~~~~

~~~~~

~~~~~

~~~~~

انتهت